

GeoGebra 3.2
for
ungdomstrinnet

av Sigbjørn Hals

Innhold:

Hva er GeoGebra?.....	3
Hvor kan jeg få tak i dette programmet?	3
Hvordan kommer jeg i gang med å bruke programmet?	4
Å hente og legge til et nytt verktøy i GeoGebra.	5
Bli kjent med koordinatsystemet.....	5
Hvordan forandrer jeg innstillingene langs aksene i koordinatsystemet?	7
Koordinater med GeoGebra	8
Oppgave 1	8
Løsning på oppgave 1.....	8
Oppgave 2.....	9
Løsning på oppgave 2.....	10
Oppgave 3.....	10
Løsning på oppgave 3.....	10
Oppgave 4	11
Løsning på oppgave 4.....	11
Oppgave 5	13
Løsning på oppgave 5.....	13
Oppgave 6.....	15
Løsning på oppgave 6.....	15
Oppgave 7. (En utforskende oppgave.)	17
Løsning på oppgave 7.....	18

Hva er GeoGebra?

GeoGebra er et gratis dataprogram for dynamisk geometri, laget av Markus Hohenwarter fra Østerrike. Navnet *GeoGebra* er satt sammen av ordene **geometri** og **algebra**.

Med *GeoGebra* kan en lett konstruere ulike geometriske figurer i planet og tegne og analysere grafer og funksjoner. *GeoGebra* finnes på en rekke språk, og er også oversatt til bokmål og nynorsk. Programmet kan brukes med både *Windows*, *Linux* og *Mac*.

Hvor kan jeg få tak i dette programmet?

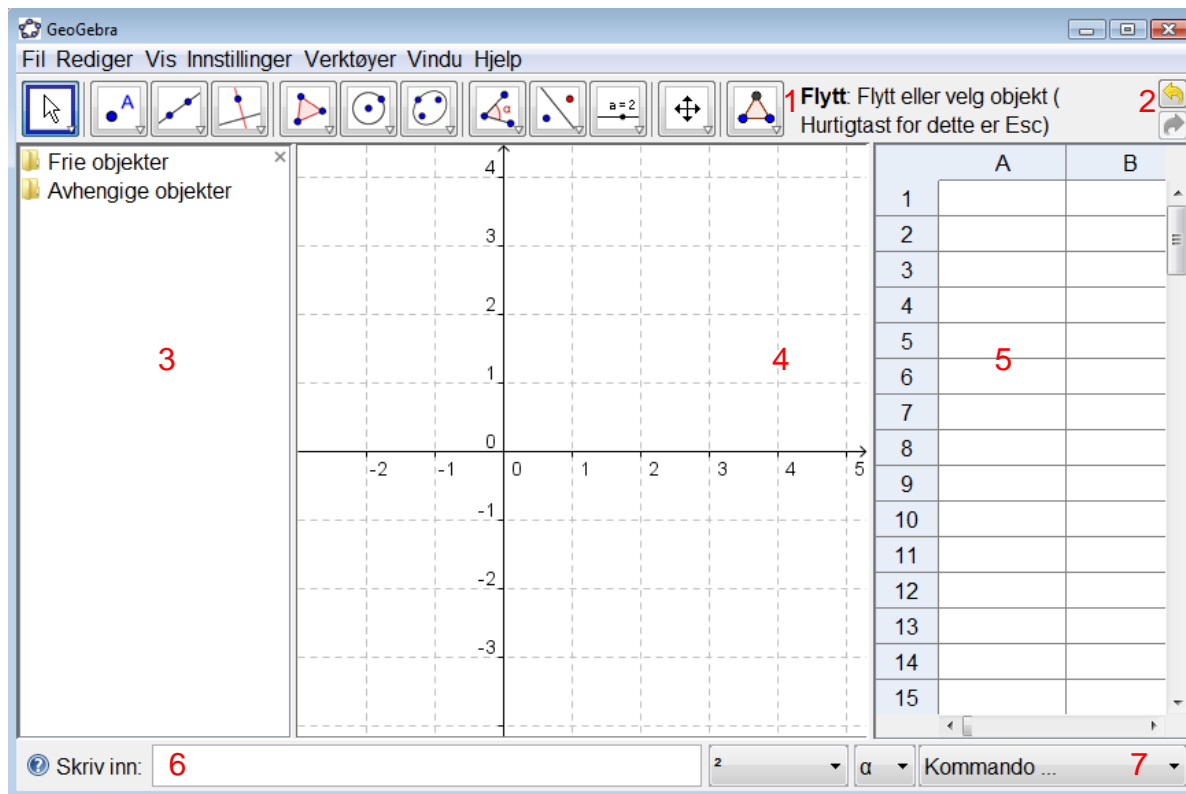
Den letteste måten å skaffe og installere *GeoGebra* på, er å gå til www.geogebra.org, klikke på *Webstart* og på *Webstart igjen*. Da blir programmet automatisk installert på datamaskinen, samtidig som du åpner det fra nettsiden den første gangen. Det legger seg et ikon på skrivebordet. Når du senere klikker på dette ikonet, blir *GeoGebra* åpnet fra din egen maskin. Da trenger du ikke å ha nett-tilgang for å kjøre programmet.

Viktig: For at *GeoGebra* skal fungere, trenger du å ha installert en ny utgave av *Java* på datamaskinen. *Java* kan lastes ned gratis fra: www.java.com/en/download/index.jsp

Dersom du har problemer med å åpne *GeoGebra*-filene, kan du gå til www.interped.no/GeoGebra og se opplæringsvideoen *Før installasjon av GeoGebra*.

Hvordan kommer jeg i gang med å bruke programmet?

For å komme raskt i gang, er det lurt å starte med å gjøre seg kjent med de ulike vinduene (feltene) og verktøyene i *GeoGebra*. Nedenfor finn du en oversikt over disse:



- 1 Verktøylinja.** Hvert ikon har en trekant i nederste høyre hjørne. Ved å klikke på denne trekanten får du fram flere verktøyer. Vi skal se på disse etter hvert.
- 2 Angreknapp.** Ved å klikke på disse pilene, kan du gå ett skritt fram eller ett tilbake for hvert klikk.
- 3 Algebrafeltet.** Her kommer likningene eller funksjonsuttrykkene som du har skrevet inn i inntastingsfeltet (6). Her ser vi også lengder på linjestykker, areal av mangekanter og alle målinger eller utregninger som du ber programmet om å utføre.
- 4 Grafikkfeltet.** Her får du tegnet geometriske figurer eller grafer. Du kan vise eller skjule aksene og rutenett ved å klikke på *Vis* og fjerne eller vise haker framfor disse ordene i menyen. Ved å høyreklikke på grafikkfeltet kan du forandre på verdiene langs aksene og justere mange andre egenskaper.
- 5 Regnearket.** Dette fungerer mye på samme måten som et vanlig regneark, men har færre muligheter enn for eksempel *Excel* og *Calc*. Fordelen med dette regnearket er at de fungerer dynamisk sammen med verdier i *Algebrafeltet* og i *Grafikkfeltet*.

- 6 **Inntastingsfeltet.** I dette feltet skriver du inn kommandoer for å få fram det du ønsker på grafikkfeltet og i algebrafeltet. Du kan for eksempel skrive $Avstand[A,B]$ og trykke *Enter*. Da får du avstanden mellom de to punktene A og B som du har plassert på grafikkfeltet på forhånd.
- 7 **Kommandofeltet.** Dersom du klikker på pila til høyre for dette feltet kommer det fram en alfabetisk kommandomeny som du kan velge fra. Velger du for eksempel **Midtpunkt**, kommer **Midtpunkt[]** fram i inntastingsfeltet. Da trykker du *Enter* for å komme mellom parentesene og skriver inn navnet på et linjestykke eller to punkter. For eksempel **Midtpunkt[a]** eller **Midtpunkt[A,B]**. Da får du tegnet et punkt som ligger midt på linjestykket a eller et punkt som ligger midt mellom A og B . Du får koordinatene til dette midtpunktet i algebrafeltet.

Å hente og legge til et nytt verktøy i GeoGebra.

Tidligere var det veldig tungvint å tegne høyder i trekanter med *GeoGebra*. Fra versjon 3.0 kan vi lage våre egne verktøyer og legge inn verktøy som andre har laget. Nå vil vi først legge inn verktøyet *Høyde.ggt*. Dersom du vil lære å lage slike verktøyer selv, kan du gå til www.inter-ped.no/Sinus og laste ned heftet *Hva er nytt i GeoGebra 3.0?* På side 4-10 i dette heftet får du forklart trinnvis framgangsmåten for å lage slike verktøyer selv.

Her er kort forklart hvordan du kan legge til det ferdige verktøyet *Høyde.ggt* på verktøylinja.

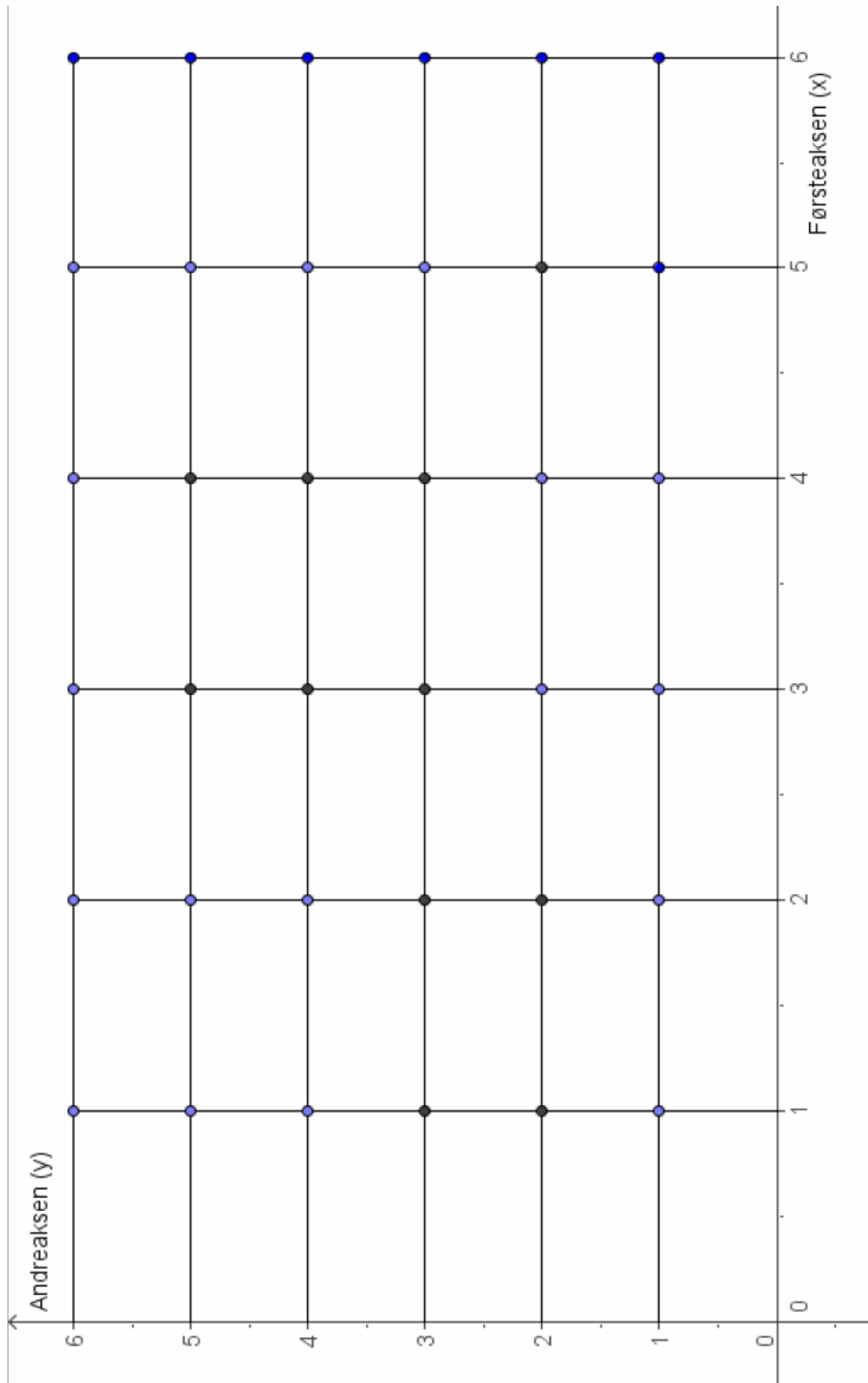
- Gå til nettsiden www.inter-ped.no/GeoGebra
- Klikk på fila *Høyde.ggt* og lagre denne på datamaskinen, slik at du lett finner den igjen senere.
- Åpne *GeoGebra* og velg *Fil* og *Åpne*. Åpne fila *Høyde.ggt*. Du ser nå at du har fått et nytt ikon på verktøylinja.
- Klikk på **Innstillinger** og **Lagre innstillinger**. Nå vil det nye verktøyet alltid være der hver gang du åpner *GeoGebra*.

Bli kjent med koordinatsystemet.

Før vi jobber med koordinatsystemet i *GeoGebra*, skal vi gjennomføre ei kort spilleøkt som viser hvordan elevene kan få automatisert plassering av punkter i et koordinatsystem.



- 2-3 elever spiller i lag.
- Hver spiller har 3 brikker med lik farge. (Spillerne har hver sin farge.)
- Hver gruppe deler en terning.
- Den som har fødselsdag først i året starter og triller terningen **to ganger**.
- Første kast forteller x -verdien og andre kast forteller y -verdien. Får spilleren en 4-er og en 1-er, skal han plassere ei brikke i punktet $(4,1)$
- Nå er det neste spiller sin tur. Når alle brikkene er plasserte, kan en spiller velge hvilken av de tre brikkene sine han vil flytte på.

- Formålet med spillet er å få tre brikke som er på ei rett linje, vannrett, loddrett eller på skrå. Det kan godt være avstand mellom punktene.
- Den første som får 3 på ei linje har vunnet. Dersom ei brikke blir plassert oppå en annen brikke, blir den underste slått ut og denne spilleren er ute.



Hvordan forandrer jeg innstillingene langs aksene i koordinatsystemet?

Før vi starter med å tegne punkter og linjer i *GeoGebra*, kan det være greit å vite hvordan en zoomer ut og inn. Dette kan du gjøre på flere ulike måter i GeoGebra 3.2:

1. Klikk på trekanten nede i høyre hjørne på dette ikonet på verktøylinja:  Velg *Forminsk*, og klikk flere ganger på det ønskede stedet på grafikkfeltet. Ulempen med denne metoden, er at det blir forminking langs både *x*-aksen og *y*-aksen samtidig.
2. Høyreklikk et sted på grafikkfeltet og velg *x-akse:y-akse*. Prøv med 1:10 eller et annet forhold mellom verdiene langs *x*-aksen og *y*-aksen.
3. Høyreklikk et sted på grafikkfeltet og velg *Egenskaper*. Da kan du selv velge nøyaktig innstillingene langs aksene.
4. Du kan rulle med musehjulet for å zoome ut eller inn.
5. Når du har trykt på dette ikonet , er det lett å dra i og flytte på aksene. I alle andre menyvalg kan du også klikke og dra i aksene dersom du holder nede *Shift* samtidig.
6. Du kan holde nede høyre musetast og dra et rektangel over det området du vil zoome inn til.

Prøv disse måtene når du har lagt inn noe på grafikkfeltet.

OBS! For å få rett form på sirkler og for å få høyder og normaler til å se ut til å være vinkelrette på de aktuelle linjene, må forholdet mellom *x*-aksen og *y*-aksen være 1:1.

Koordinater med GeoGebra

Oppgave 1

Kompetansemål etter 10. årstrinn:

Geometri

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- bruke koordinater til å avbilde figurer og finne egenskaper ved geometriske former

Måling

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre overslag over og beregne lengde, omkrets, vinkel, areal, overflate, volum og tid, og bruke og forandre målestokk

a) Plasser disse punktene i koordinatsystemet:

A: (-5 , -1) B: (-2 , 1) C: $(2 , \frac{1}{2})$ D: (5 , 1)

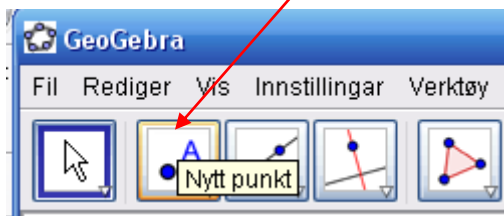
E: (6 , -3) F: (11 , -2) G: (11 , 2)

b) Tegn linjestykker mellom AB, BC, CD, DE, EF og FG.
Hva skal figuren forestille?

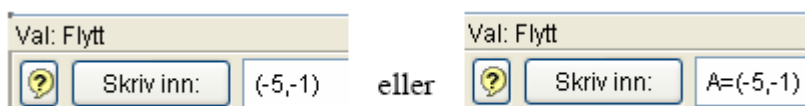
c) Hvor langt er det på figuren mellom punktene A og B?
Hvor langt er det på figuren mellom punktene F og G?

Løsning på oppgave 1.

a) Klikk på ikonet for punkter på verktøylinja og plasser etter tur punktene i koordinatsystemet.



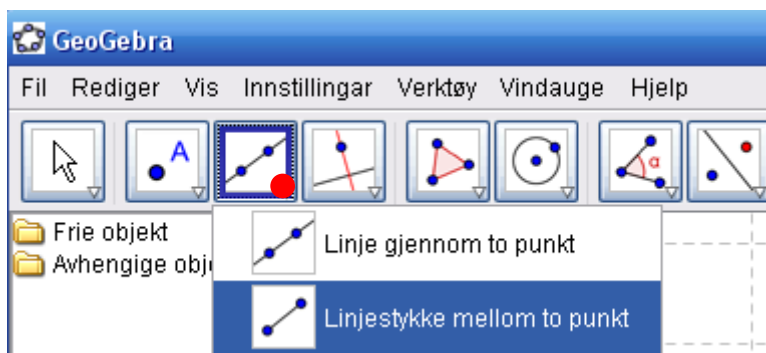
En alternativ måte å gjøre dette på, er å skrive koordinatene inn i inntastingsfeltet. Da plasserer *GeoGebra* punktene på rett plass. Denne måten er kanskje ikke like godt egnet til å lære elevene om koordinatsystemet.



Pass på å skrive store bokstaver for punkter. Skriver du for eksempel $a=(5,1)$ får du ikke et punkt, men en vektor.

Du får sannsynligvis ikke se alle punktene fordi aksene på grafikkfeltet ikke er rett innstilt. Da zoomer du ut slik det er forklart på side 7 i dette heftet.

- b) Klikk på den vesle trekanten nede i høyre hjørne på ikonet for linjer og linjestykker. Velg *Linjestykke mellom to punkter*.



Klikk på punkt **A** og **slipp**. Klikk så på punkt **B**.

Gjenta dette for alle punktene bortover. Figuren viser ei skisse av Karlsvogna.

- c) I algebrafeltet kan vi lese av at avstanden mellom **A** og **B** er 3,61 cm på figuren, og avstanden mellom **F** og **G** er 4 cm på figuren.

Oppgave 2.

Kompetansemål etter 10. årstrinn:

Måling

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre overslag over og beregne lengde, omkrets, vinkel, areal, overflate, volum og tid, og bruke og forandre målestokk
- velge passende målinger, forklare sammenhenger og regne om mellom ulike måleenheter, bruke og vurdere måleinstrumenter og målemetoder i praktisk måling, og drøfte presisjon og måleusikkerhet


- a) Gå til www.inter-ped.no/Kurs og last ned den ferdige fila *Kart over Bergen og omegn.ggb*
Hvilket sted ligger på koordinatene (11, 15)?

b) Hvilke koordinater har Fedje?

c) Hvor mange cm er det i luftlinje fra Mo til Norheimsund på kartet?

d) Hvor mange km er dette i terrenget?

Løsning på oppgave 2.

- a) Klikk på ikonet for punkt,  før musepekeren til koordinatene (11 , 15)
Her finner du Masfjordnes.
- b) Før muspekeren over Fedje. Når du har samme verktøyet som i a, leser du av at koordinatene til Fedje på dette kartet er (2.7, 15.6)
- c) Velg *Linjestykke mellom to punkter*, klikk på Mo, slipp og klikk på Norheimsund. Du kan nå lese av i algebrafeltet at avstanden mellom Mo og Norheimsund er 13,2 cm på kartet.
- d) Fordi kartet har målestokk 1:500 000, blir dette $13,2 \text{ cm} \cdot 500\,000 = 6\,600\,000 \text{ cm}$ i terrenget.
Skriv $13.2 \cdot 500000$ i inntastingsfeltet og trykk *Enter*. Husk å bruke punktum som desimaltegn.
- e) $6\,600\,000 \text{ cm} = 66\,000 \text{ m} = 66 \text{ km}$ i terrenget.

Oppgave 3.

Kompetansemål etter 10. årstrinn:

Funksjoner

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- lage, på papiret og digitalt, funksjoner som beskriver numeriske sammenhenger og praktiske situasjoner, tolke dem og omsette mellom ulike representasjoner av funksjoner, som grafer, tabeller, formler og tekst.

Forklar hvordan grafen til $f(x) = a \cdot x + b$ forandrer seg når vi forandrer på a og b .

Løsning på oppgave 3.

- Klikk på *Fil* og velg *Ny*. Svar *Nei* for å lagre fila.
- Skriv i inntastingsfeltet: $a = 2$ og trykk *Enter*.
- Skriv i inntastingsfeltet $b = 3$ og trykk *Enter*.
- Skriv $f(x) = a \cdot x + b$ OBS. Ikke glem stjerne som gangetegn mellom a og x . Du må ha $*$ når det er a , b , c osv som konstanter i stedet for tall.
- Høyreklikk på a i algebravinduet og velg *Vis objekt*. Du får nå en glider på grafikkfeltet. Om du vil kan du høyreklikke på glideren, velge *Egenskaper*, klikke på arkfanen *Glider* og justere minimums- og maksimumsverdiene til -10 og 10.



- Gjør det samme og lag en glider for b .
- Flytt på en glider om gangen og se hva som skjer når du forandrer a og b .
- Forklar med egne ord hvordan stigingstallet og konstantleddet påvirker grafen til funksjonen.

Oppgave 4

Kompetansemål etter 10. årstrinn:

Tall og algebra

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- løse likninger og ulikheter av første grad og enkle likningssystem med to ukjente

Funksjoner

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- lage, på papiret og digitalt, funksjoner som beskriver numeriske sammenhenger og praktiske situasjoner, tolke dem og omsette mellom ulike representasjoner av funksjoner, som grafer, tabeller, formler og tekst

Måling

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre overslag over og beregne lengde, omkrets, vinkel, areal, overflate, volum og tid, og bruke og forandre målestokk

a) Bruk *GeoGebra* til å løse likningssettet

$$\begin{aligned} 2x + y &= 13 \\ 4x - 5y &= 5 \end{aligned}$$

b) La *GeoGebra* ordne likningene på forma $y = a \cdot x + b$

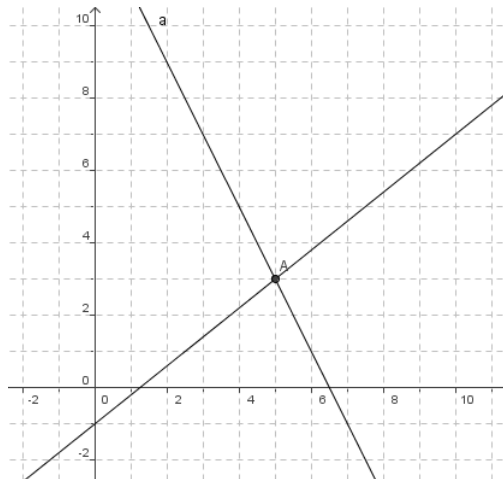
c) Finn den minste vinkelen mellom disse linjene.

Løsning på oppgave 4

- a) Skriv $2x + y = 13$ i inntastingsfeltet og trykk *Enter*.
Skriv $4x - 5y = 5$ i inntastingsfeltet og trykk *Enter*.
Vi ser nå at grafene skjærer hverandre når $x = 5$ og $y = 3$

Om vi vil, kan vi klikke på ikonet for å sette inn punkter, føre musa over skjæringspunktet, slik at begge linjene blir mørkere, og så klikke. Da får vi koordinatene til skjæringspunktet (5,3) i algebrafeltet.


- ☞ Frie objekt
 - **a: $2x + y = 13$**
 - **b: $4x - 5y = 5$**
- ☞ Avhengige objekt
 - **A = (5, 3)**
- ☞ Hjelpeobjekt

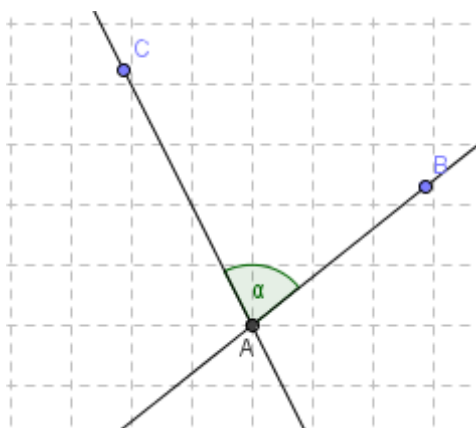


- b) Høyreklikk på en av likningene i algebrafeltet og velg $y = ax + b$
Gjør det samme med den andre likningen. Da får du dem på denne forma:

- ☞ Frie objekt
 - **a: $y = -2x + 13$**
 - **b: $y = 0.8x - 1$**
- ☞ Avhengige objekt
 - **A = (5, 3)**
- ☞ Hjelpeobjekt

- c) Lag et punkt på hvert av vinkelbeina slik figuren til venstre under viser.

Klikk på ikonet for å måle vinkler . Klikk så på punktet på høyre vinkelbein, på skjæringspunktet mellom linjene og til slutt på punktet på venstre vinkelbein. Altså: høyre, spissen, venstre (eller B, A og C).
Då får du størrelsen på vinkelen mellom de to linjene i algebrafeltet.



Oppgave 5

Kompetansemål etter 10. årstrinn:

Funksjoner

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- identifisere og utnytte egenskapene til proporsjonale, omvendt proporsjonale, lineære og enkle kvadratiske funksjoner, og gi eksempler på praktiske situasjoner som kan beskrives med disse funksjonene
- a) Meningen med en parabolantenne, er at alle strålene som kommer fra en satellitt og treffer antenna, skal bli samlet i ett punkt (der mottakerhodet er plassert) for å få et sterkt samlet signal der.



Ordet parabol kommer fra ordet parabel. En parabel er gitt ved funksjonsuttrykket: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, der a , b og c er konstanter.

Gå til www.inter-ped.no/Kurs. Åpne den ferdige GeoGebra-fila *Parabel og parabol.ggb* og flytt på gliderne for a , b og c for å prøve å lage en andregradsfunksjon som passer til parabolen som er avbildet der.

- b) Velg *Fil* og *Ny* og tegn grafen til andregradsfunksjonen $f(x) = x^2 - 16$. Finn nullpunktene til funksjonen (punktene der grafen skjærer x -aksen og $y = 0$)
- c) I en avgangsklasse på videregående skole er det 30 elever. En av elevene foreslår at de skal spleise på en russebil. Russebilen koster 6000 kr. Velg *Fil* og *Ny* og lag en graf med GeoGebra som viser utgiftene per elev når tallet på elever varierer fra 1 til 30.

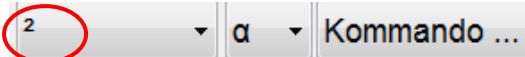
Løsning på oppgave 5

a) Parabolproblemet

- Gå til www.inter-ped.no/Kurs og hent den ferdige GeoGebra-fila *Parabel og parabol.ggb*
- Flytt på gliderne for a , b og c og finn det andregradsuttrykket som passer med parabolen.

$$f(x) = \underline{\quad} x^2 + \underline{\quad} x + \underline{\quad}$$

b) Nullpunkt for andregradsfunksjonen $f(x) = x^2 - 16$

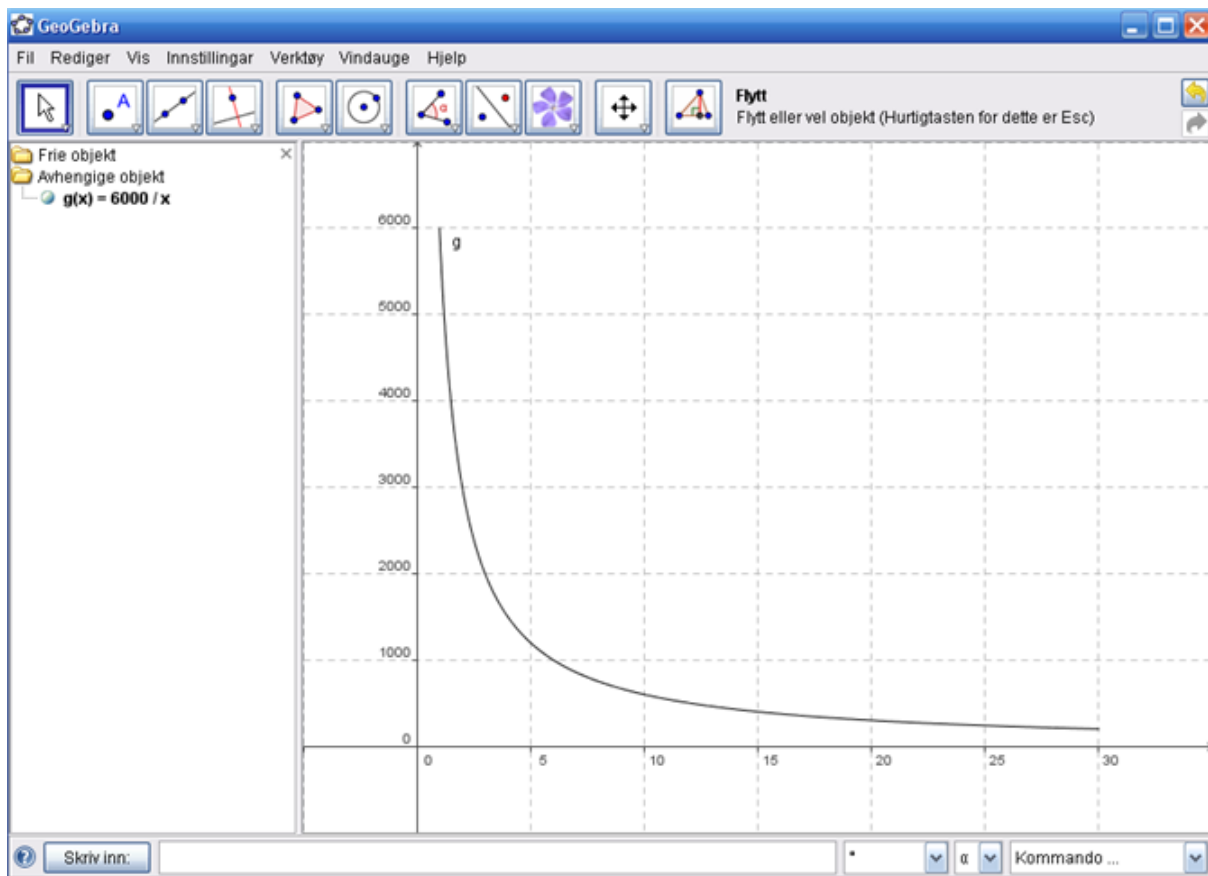
- Velg *Fil* og *Ny* og skriv inn $f(x) = x^2 - 16$ i inntastingsfeltet og trykk *Enter*. Du får fram eksponenten ² ved å holde nede Alt-tasten og trykke 2 på tastaturet eller ved å klikke her: 

Du må forandre innstillingene langs aksene på en av måtene som er forklart på side 7.

- Skriv *Nullpunkt[f]* og trykk *Enter*. Du kan nå lese av nullpunktene i algebrafeltet.

c) Omvendt proporsjonalitet

- Skriv *Funksjon[6000 / x, 1, 30]* og trykk *Enter*. Du må forandre innstillingene langs aksene på en av måtene som er forklart på side 7.



- Dersom du vil vite hvor mye hver av elevene må betale, når det er 9 elever som vil være med, kan du dele 6000 på 9 eller skrive inn i inntastingsfeltet $f(9)$ eller $g(9)$ alt etter hva *GeoGebra* har kalt funksjonen.

Oppgave 6.

Kompetansemål etter 7. årstrinn: (OBS. Det står ikke noe om speiling i kompetansemålene etter 10. årstrinn, men erfaringsmessig trenger dette å repeteres.)

Geometri

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- beskrive og gjennomføre speiling, rotasjon og parallellforskyvning

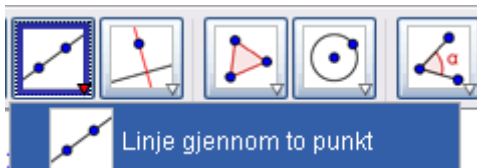
- Tegn en trekant og speil denne om ei linje.
Kan du si noe om avstandene fra punktene til linja?
- Tegn en trekant og speil denne om et punkt.
Kan du si noe om avstandene fra punktene til speilingspunktet?
- Gå til www.inter-ped.no/Kurs. Hent ned bildene av den halve sommerfuglen eller av Lisa eller Homer Simpson og speil ett av disse bildene om ei linje.

Løsning på oppgave 6.

- Velg verktøyet for mangekant og lag en trekant på grafikkfeltet. Det er lurt å ha fjernet akser og rutenett først. (Bruk *Vis*-menyen på verktøylinja.)



Tegn også ei linje på skrå nær trekanten ved hjelp av verktøyet *Linje gjennom to punkter*.



Velg verktøyet *Speil objekt om linje*, klikk på trekanten og deretter på linja.

Trekk linjestykker mellom A og A' , mellom B og B' og mellom C og C' .

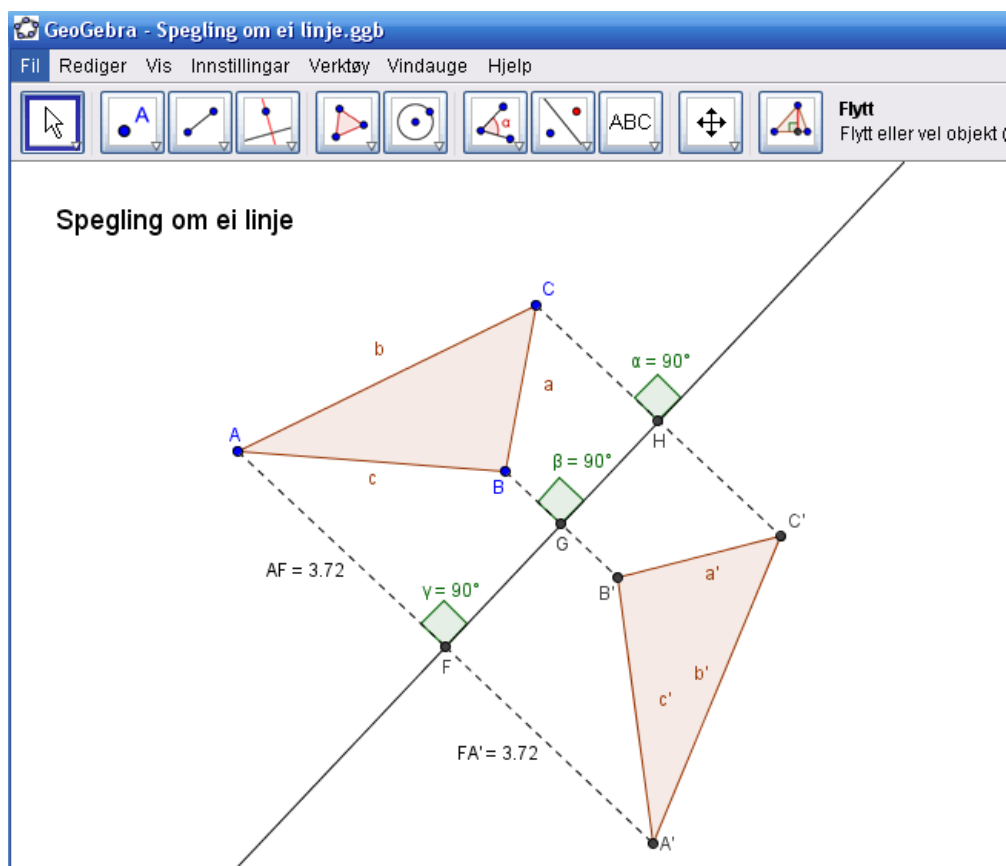
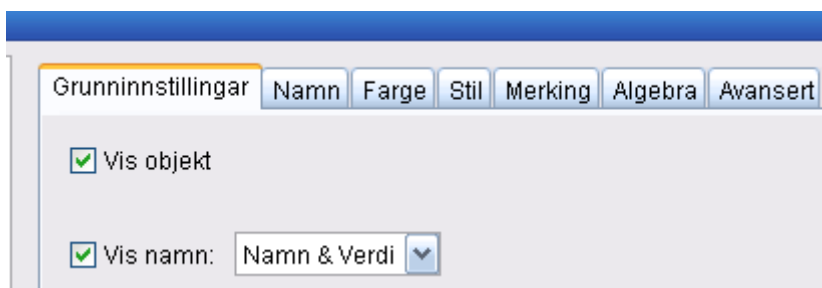
Finn skjæringspunktene mellom disse linjene og speilingslinja.

Du kan måle vinkler og lengder på linjestykker slik figuren på neste side viser.

Da ser vi godt at avstanden fra et punkt til speilingslinja er lik avstanden fra det speilede punktet til den same linja.



For å få stiplede linjestykker, høyreklikker du på dem, velger *Egenskaper*, *Stil* og velg ei stipla linje under *Linjestil*.

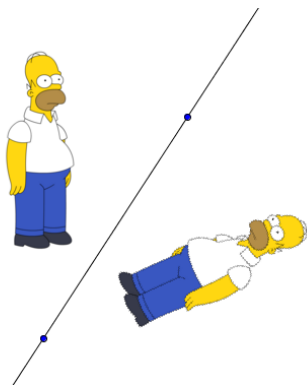
Vi kan omdøpe linjestykkene ved å høyreklikke på dem og velge *Gi nytt navn*. Vil vi vise både navnet på linjestykket og verdien, høyreklikker vi på linjestykket, velger *Egenskaper*, *Grunninnstillinger* og velger *Navn og verdi* under *Vis*. Flytt på et punkt for å se forandringene.



b) Gjenta det samme som i oppgave a, men velg nå *Speiling om punkt*.

c)

- Gå til www.inter-ped.no/Kurs og hent ned bildet *Sommerfugl, Lisa* eller *Homer*. Lagre bildet slik at det blir lett å finne igjen når du skal bruke det.
- Klikk på den lille trekanten nede i høyre hjørne på dette ikonet  og velg ikonet for å sette inn et bilde:  **Sett inn bilde**
- Klikk på grafikkfeltet der du vil ha nedre venstre hjørne av bildet. Velg bildet du vil bruke fra der du lagret det.
- Speil bildet om ei rett linje, slik vi gjorde i oppgave a.



Oppgave 7. (En utforskende oppgave.)

Kompetansemål etter 10. årstrinn:

Geometri

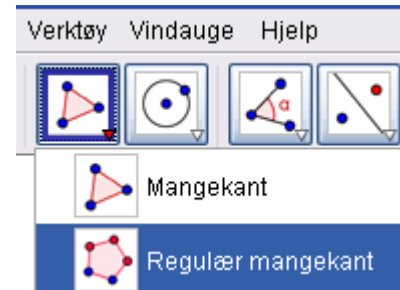
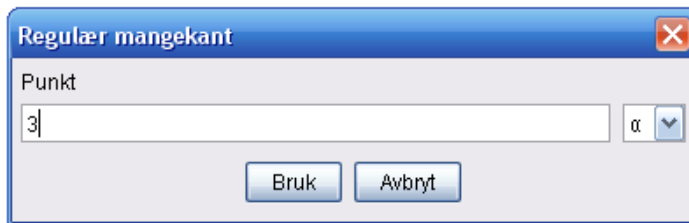
Mål for opplæringen er at eleven skal kunne


- analysere, også digitalt, egenskaper ved to- og tredimensjonale figurer og bruke dem i forbindelse med konstruksjoner og beregninger
- a) Tegn en regulær trekant, firkant, femkant og sekskant og mål vinklene i hver av dem.
 - b) Hva blir summen av vinklene i hver av disse regulære mangekantene?
 - c) Kan du finne fram til en formel for summen av vinklene i en regulær n -kant?

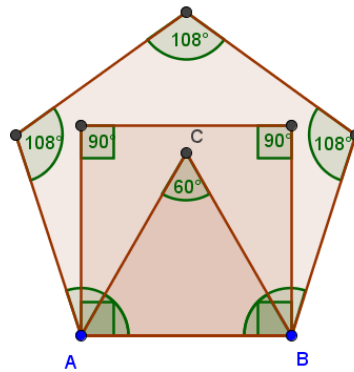
n	Kvar vinkel er:	Summen av vinklene er:
3	60°	180°
4		
5		
6		

Løsning på oppgave 7.

Velg verktøyet *Regulær mangekant*.
Merk av to punkter *A* og *B*, skriv inn 3 i vinduet for *Punkt* og klikk *Bruk*.



Klikk på verktøyet for å måle vinkler  og klikk deretter et sted inne i trekanten. Vi kan nå lese av hvor store vinklene er.



Gjenta det samme med de samme startpunktene *A* og *B* for de andre mangekantene. Elevene kan bruke *GeoGebra* som kalkulator og skrive $5 \cdot 108$ i inntastingsfeltet for å regne ut summen av vinklene i en femkant.

No kan elevene se om de ser et system, fyller ut for andre mangekanter (uten å måle) og se om de finner en generell formel for summen i en n -kant. Til slutt kan de teste formelen sin ved å tegne for eksempel en 10-kant.

N	Kvar vinkel er:	Summen av vinklene er:	
3	60°	180°	Mål
4			
5			
6			"Tipp" og regn ut
7			
8			
9			
10			
n			