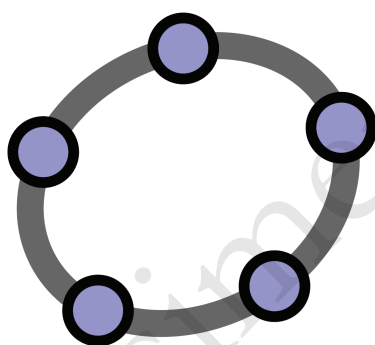


GeoGebra 3.2 for videregående skole



Tor Espen Kristensen

Norsk GeoGebra-institutt

© Norsk GeoGebra-institutt/Matematikksenteret, 2011

1. utgave / 1. opplag 2011

Norsk GeoGebra-institutt
Matematikksenteret NTNU
7491 Trondheim

ISBN 978-82-997448-3-6

<http://www.geogebra.no>

Materialet er omfattet av åndsverkslovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med rettighetshaverne er enhver eksemplarframstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk. Utnyttelse i strid med lov eller avtale kan medføre erstatningsansvar og kan straffes med bøter eller fengsel.

Forord

Denne boka har utviklet seg fra små hefter som jeg har brukt på ulike kurs. Boka er bygget opp rundt en del tema som er aktuelle for lærere i videregående skole, og jeg har prøvd å veksle mellom eksempler og oppgaver. Jeg håper at du vil få se hvor nyttig program GeoGebra er gjennom arbeidet med de ulike oppgavene og eksemplene. Boka kan brukes til selvstudium, men er først og fremst tenkt som kursmateriell til Norsk GeoGebra-institutt sine kurs. Vi har tatt med en god del oppgaver, men vil poengtere at du ikke finner ferdige undervisningsopplegg i denne boka. Alle eksamensoppgavene er hentet fra Utanningsdirektoratet (2011). Jeg vil ikke her ta stilling til om dette er den beste måten å løse de ulike oppgavene eller hva som er læringseffekten av å gjøre det ene eller det andre. Her vil vi kun kose oss med selve programmet og løsningene av en del oppgaver.

Før vi setter i gang vil jeg takke for mange gode innspill til denne boka, både fra kursdeltakere og fra kollegaer. Jeg vil spesielt takke for gode kommentarer fra Torger Nilssen, Anders Sanne og Jostein Våge som alle er tilknyttet Norsk GeoGebra-institutt (<http://www.geogebra.no>).

Dersom du har spørsmål, kommentarer eller forslag til forbedringer av denne boka, så vil vi sette pris på om du sender oss noen ord. Bruk gjerne epostadressen post@geogebra.no til dette.

Innhold

Forord	i
1 Å komme i gang med GeoGebra	1
Installering av GeoGebra	1
Litt om oppbygningen til GeoGebra	1
2 Funksjoner i GeoGebra	2
Plotting, nullpunkter og ekstremalpunkter	2
Skjæringspunkt mellom to objekter	9
Blandede oppgaver	11
3 Glidere	14
4 Kopiere og lime inn i en tekstbehandler	16
5 Regresjon	17
6 Statistikk	21
7 Sannsynlighet	26
8 Geometri	28
Konstruksjoner	28
Perspektiver	31
Sporing	35
Formatering av objekter	39
9 Arealet under en graf	40
10 Parameterframstillinger	45
11 Egne verktøy i GeoGebra	50
12 Tekst og bilder i GeoGebra	53
Legge til bilder	53
Sette inn tekst	56

13 Arbeidsark i GeoGebra	60
Lage interaktiv nettside	60
Tilpasse verktøylinjen	62
14 Følger/Lister	65
15 Tips og triks	72
Register	78
Kommandoer brukt i boka	80
Referanser	81

Spesimenen

1 Å komme i gang med GeoGebra

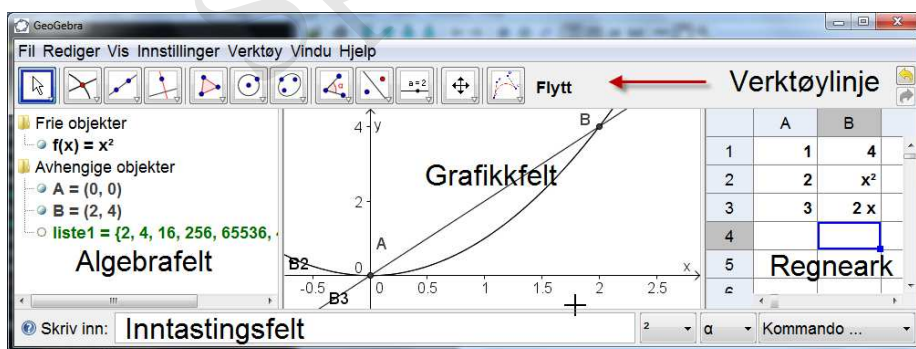
GeoGebra er et program som kobler sammen geometri, algebra og funksjoner. Det er et dynamisk geometriprogram, grafplotter og etter hvert computer algebra system (CAS)¹. Således er det et program som passer perfekt for videregående skole.

Installering av GeoGebra

Selve programmet finner du på nettsiden <http://www.geogebra.org>. Om du har Java installert, så er det bare til å trykke på [GeoGebra WebStart](#). Dersom du ikke har Java installert må du først gå til nettsiden <http://www.java.com>.

Litt om oppbygningen til GeoGebra

GeoGebra er bygget opp rundt flere felt. Det er et felt for inntasting av kommandoer, funksjonsuttrykk, tall, etc. Dette kaller vi for inntastingsfeltet. Det største feltet kaller vi for grafikkfeltet. Det er her du kan se grafer, geometriske figurer etc. Så har vi algebrafeltet. Her ser vi likninger for kurver, funksjonsuttrykk, tallverdier osv. Over disse har vi verktøylinjen. Her finner vi ulike konstruksjonsverktøy (tegning av linjer, linjestykker, sirkler, normaler etc.) og en del andre verktøy som måling av lengder, areal, innsetting av tekst etc. GeoGebra har også et eget regneark. Dette fungerer på samme måte som andre regneark ved at du kan sette inn tall, tekst og formler. For å vise dette feltet må du gå til «Vis» på menylinjen og hake av for «Regneark».



¹CAS vil bli en integrert del av GeoGebra fra og med neste versjon (4.0).

2 Funksjoner i GeoGebra

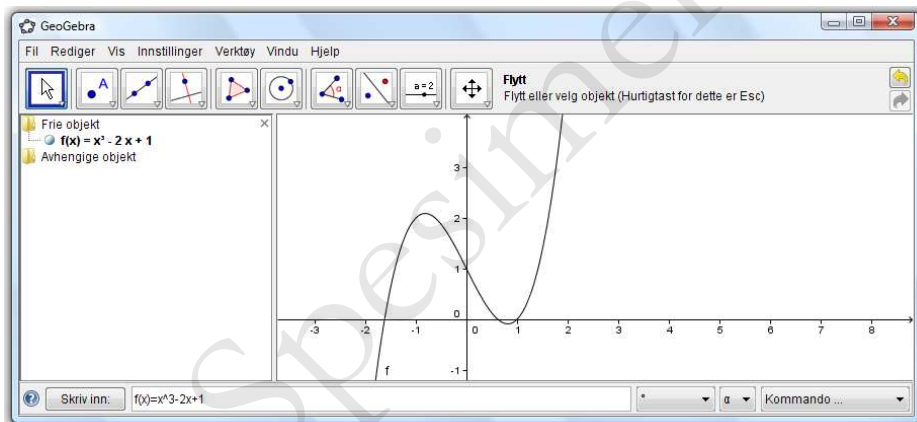
Plotting, nullpunkter og ekstremalpunkter

Eksempel 1 Vi har gitt funksjonen $f(x) = x^3 - 2x + 1$ $x \in [0, 4]$.

- Plott grafen til f i et koordinatsystem.
- Finn eventuelle nullpunkt til f .
- Finn eventuelle topp-/bunnpunkt til grafen til f .

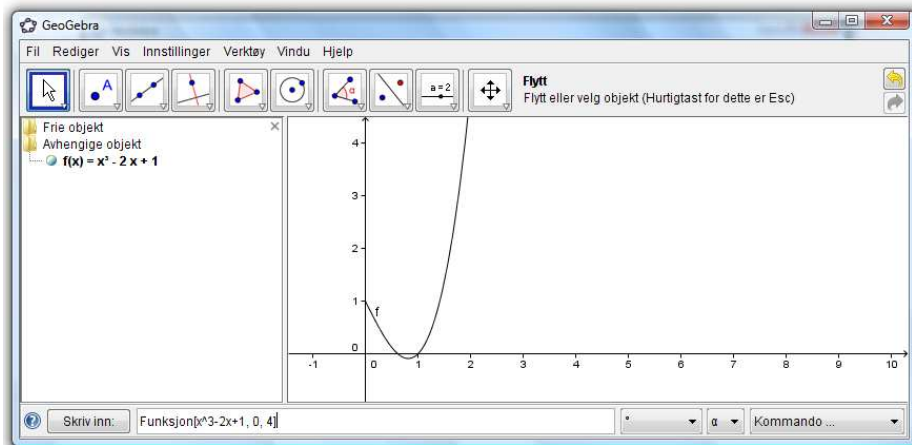
Løsning:

- Dersom vi skriver funksjonsuttrykket inn i inntastingsfeltet, vil vi få tegnet grafen uten begrensninger på x -verdiene:

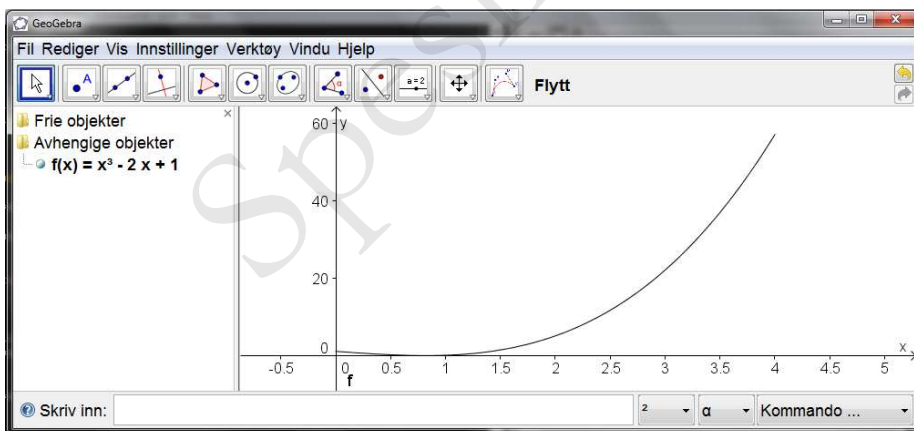


Dersom vi ønsker å plote grafen for x -verdier i et bestemt intervall, kan vi bruke kommandoen Funksjon[funksjon, a, b]. I vårt eksempel skriver vi inn:

Skriv inn: Funksjon[x³-2x+1, 0, 4]. Vi vil da få noe slikt:

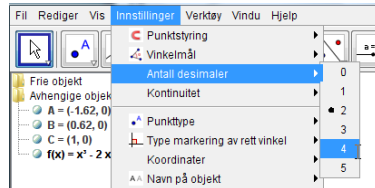


Et problem med denne grafen er at vi ikke får se alle y -verdiene. Vi ønsker derfor å zoome litt ut på y -aksen og zoome inn litt på x -aksen. Den enkleste måten å gjøre dette på, er å holde **[Ctrl]** nede mens du flytter markøren over aksene. Holder du da venstre musetast nede (mens du samtidig holder **[Ctrl]** nede), vil du kunne dra i aksene slik at du enten får strukket den ut eller trukket den sammen. Resultatet kan da se slik ut:



b) Vi skal finne nullpunktene. Det er to måter å gjøre dette på i GeoGebra. For polynomfunksjoner er det nok å skrive i inntastingsfeltet Nullpunkt [f]. Vi

vil da få tre punkt som svar, A , B og C . Disse kan vi lese av i algebrafeltet. Det ene punktet er $A = (-1,62, 0)$. Dette er ikke med i definisjonsmengden til f . Svaret på oppgaven er derfor at f har to nullpunkt: $x = 0,62$ og $x = 1$. Skulle vi ønske flere desimaler, kan vi få det ved å klikke på Innstillinger i menylinjen og velge antall desimaler:



Vi viser den andre måten å finne nullpunkt i eksempel 2.

- c) Topp-/bunnpunkt finner vi ved å bruke kommandoen **Ekstremalpunkt**. Vi skriver inn: . Vi får da tegnet inn et punkt E på grafen til f . Grafen har med andre ord et bunnpunkt $(0,8165, -0,0887)$. Vi må selvsagt ikke glemme at grafen også har to topppunkt. Ett for $x = 0$ og ett for $x = 4$. Vi kan lett regne ut funksjonsverdiene til f i disse punkta ved å skrive inn $f(0)$ og $f(4)$ i inntastingsfeltet. Vi leser da av i algebrafeltet at $f(0) = 1$. Grafen har altså to topppunkt: $(0, 1)$ og $(4, 57)$.


Eksempel 2 Finn nullpunktene til funksjonen $g(x) = \frac{x - 2}{2x + 5}$.

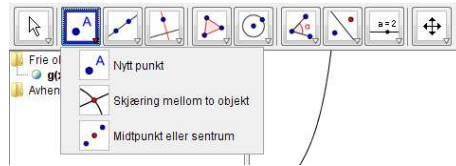
Løsning:

Vi skriver i inntastingsfeltet: . Vi får da plottet grafen. Forsøker vi så å skrive **Nullpunkt [g]**, vil ingen ting skje når vi trykker enter. Dette vil nemlig bare fungere for polynomfunksjoner. Men vi kan skrive inn

Nullpunkt [g, 3]

Tretallet er her et tall i nærheten av nullpunktet. Nå kan vi trykke enter og lese av koordinatene til punktet A som ble tegnet. Vi ser at funksjonen har nullpunkt for $x = 2$.

En annen måte å finne nullpunktet er å velge et verktøy på verktøylinjen som heter *Skjæring mellom to objekter* . Se figur 1. Når dette verktøyet er valgt, klikker du først på grafen til g og deretter på x -aksen. Da vil du få nullpunktet tegnet inn.



Figur 1: *Skjæring mellom to objekter*. For å få rullet ned de andre verktøyene må du klikke på den lille trekanten nede i høyre hjørne.

Oppgave 1 Gitt funksjonen

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2, \quad x \in [0, 2].$$

- a) Plott grafen til f i et koordinatsystem.
- b) Finn eventuelle nullpunkt til f .
- c) Finn eventuelle topp-/bunnpunkt til grafen til f .

Oppgave 2 (Eksempelsettet til MAT1011 Matematikk 1P, Høsten 2009)

En fabrikk produserer CD-stativer. Det koster $K(x)$ kroner å produsere x stativer per måned, der

$$K(x) = 12\,000 + 60x + 0,2x^2$$

- a) Tegn grafen til K i et koordinatsystem. Velg x -verdier fra 0 til 800.
- b) Hvor mange stativer kan produseres for 68 000 kroner?

Fabrikken regner med å selge de x stativene for $I(x)$ kroner per måned, der

$$I(x) = 200x$$

- c) Tegn grafen til I i samme koordinatsystem som grafen til K .
- d) Gjør nødvendige beregninger og kom med forslag til hvor mange CD-stativer som fabrikken må produsere for å gå med overskudd.

Register

- akselerasjonsvektor, 48
- algebrafeltet, 1
- angre, 75
- antall desimaler, 4
- arealet mellom to grafer, 43
- arealet under en graf, 40

- boksplott, 22

- CAS, 1
- celler, se regneark

- definisjonsmengde, 2
- deriverte, 6
- dynamisk geometriprogram, 1, 28
- dynamisk tekst, 56

- egne verktøy, 50–52
- eksportere dynamisk ark som webside, 61
- eksportere grafikkfelt, 16
- Ekstremalpunkt, 4
- endre navn, 78
- Euklid, 28
- eulers tall e , 74

- følger, se lister
- fartsvektor, 48
- Fermats spiral, 48
- forsvinningspunkt, 31
- funksjoner, 2

- gjennomsnitt, se middelvei
- glidere, 14–15, 67, 69
- grader, 74
- grafikkfeltet, 1

- grenseverdier (for histogram), 23

- histogram, 21–23
- hjelp, 73
- horisontlinje, 31
- hurtigtaster, 73

- ikon, 51
- inntastingsfeltet, 1
- installering, 1

- Java, 1

- konstruere, 28
- kostnadsfunksjon, 20
- kusp, 46
- kvadrattallene, 67
- kvartiler, 24

- LaTeX, 56
- LaTeX-kommandoer, 58
- linjedesign, 71
- lister, 22, 66–71

- makspuls, 19
- mangekant, 29, 35, 36
- MathType, 56
- middelvei, 22
- midtnormalen, 30
- midtpunkt eller sentrum, 13

- normalfordeling, 26
- Norsk GeoGebra-institutt, i
- nullpunkt, 3, 4

- oddetallene, 66

parameterframstilling, 45–49
perspektiv, 31
 π , 74
plotting, 2
polynomfunksjoner, 3

regneark, 1, 17, 78
regresjon, 17
relativ frekvens, 68

søylediagram, 21, 23, 26
sett inn bilde, 53
sett inn tekst, 56, 57
simulere, 26
sirkel, 28
skjæring mellom to objekter, 5, 9
skjule objekter, 29
skriftstørrelse, 75
sluttobjekt, 51
snorkunst, 68
speile objekt om punkt, 30
sporing, 14, 35–38
standardavvik, 24, 27
startobjekt, 51

terningkast, 26, 67
topp- og bunnpunkt, se Ekstremalpunkt
typetall, 23

utklippstavlen, 16

variasjonsbredde, 24
vektorfunksjoner, 45
vendepunkt, 8
verktøylinjen, 1, 63
vinkelhalveringslinje, 30

zoome, 3, 77

Kommandoer brukt i boka

BeholdDersom, 70
BoksPlott, 22
Derivert, 6, 7, 49
Ekstremalpunkt, 4, 14
Element, 67, 70
Følge, 65, 66, 70
Funksjon, 2
Histogram, 22
Integral, 42, 43
InversNormalfordeling, 27
IterasjonListe, 65, 70
Kurve, 45
Lengde, 70
Linjestykke, 67
Maks, 24, 70
Median, 22
Middelverdi, 22, 23
Min, 24, 70
Normalfordeling, 26
Nullpunkt, 3, 4
Punkt, 69
Q1, 24
Q3, 24
RegLin, 18, 19
RegPoly, 18, 19
Roter, 68
Søylediagram, 21, 23, 26, 66
Skjæring, 9, 10, 43
Sorter, 70
Standardavvik, 24
Stigning, 6
Sum, 65, 70
SumOver, 40
SumUnder, 40
Tangent, 8
TellDersom, 66, 70
TilfeldigMellom, 26
Typetall, 23
Vektor, 49
Vendepunkt, 8
x(<Punkt>), 8
y(<Punkt>), 8

Referanser

Amdal, A. (2009a). Vincenzo Vivianis setning. *Tangenten*, (3).

Amdal, A. (2009b). Vincenzo Vivianis setning – del 2. *Tangenten*, (4).

Gjøvik, Ø. og Sanne, A. (2009). Skrivning i matematikkfaget. *Tangenten*, (4). Artikkelen kan lastes ned fra
<http://www.caspar.no/tangenten/2009/Gjovik-Sanne-409.pdf>.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton University Press, second edition.

Utdanningsdirektoratet (2011). Eksamensoppgaver for videregående skole.
<http://www.utdanningsdirektoratet.no/>.

Spesimenen

Boka gir en grundig innføring i matematikkprogrammet GeoGebra. Den er bygget opp rundt tema som er aktuelle for lærere i videregående skole. Forfatteren veksler mellom ferdige eksempler og øvingsoppgaver, og han har også tatt med en del eksamensoppgaver. Boka kan gjerne brukes til selvstudium, men er først og fremst tenkt som kursmateriell til Norsk GeoGebra-institutt sine kurs.

Boka kan bestilles på www.geogebra.no

Et eventuelt overskudd fra salg av denne boka går til drift av Norsk GeoGebra-institutt.

Om forfatteren



Tor Espen Kristensen er lektor ved Stord videregående skule med undervisningsfagene matematikk og fysikk. Tor Espen er en erfaren og etterspurt kursholder, og han er sertifisert GeoGebra-instruktør.

ISBN 978-82-997448-3-6